Μάνος Μαυρογιάννης

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΤΙΤΛΟΣ : ‘‘ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ VERSIERA (“ΜΑΓΙΣΣΑ ΤΗΣ AGNESI”) ’’

Η μάγισσα της Agnesi : Η επονομαζόμενη «μάγισσα της Agnesi» είναι μια καμπύλη σχήματος καμπάνας που μπορεί να κατασκευαστεί ως ακολούθως: Ξεκινάμε με τον κύκλο κέντρου $\mathrm{K}(0,1)$ και ακτίνας $\rho = 1$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επιλέγουμε τυχαίο σημείο A πάνω στην ευθεία $\psi = 2$ και το ενώνουμε με την αρχή $\mathrm{O}(0,0)$ του ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μέσω ενός ευθυγράμμου τμήματος. Ονομάζουμε B το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος με τον κύκλο. Έστω $\mathrm{P}(\chi , \psi)$ το σημείο όπου η κατακόρυφος από το A τέμνει την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το B . Η «μάγισσα» θα είναι η καμπύλη που διατρέχει το σημείο P καθώς το A κινείται επί της ευθείας $\psi = 2$. Θεωρούμε $\mathrm{A}Q = \chi$ και έστω t το ακτινιακό μέτρο της γωνίας που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα OA με τον θετικό ημιάξονα $\mathrm{O}\chi$.

(I) Να αποδείξετε ότι : $\psi = 2 - (\mathrm{AB}) \cdot \eta\mu t$

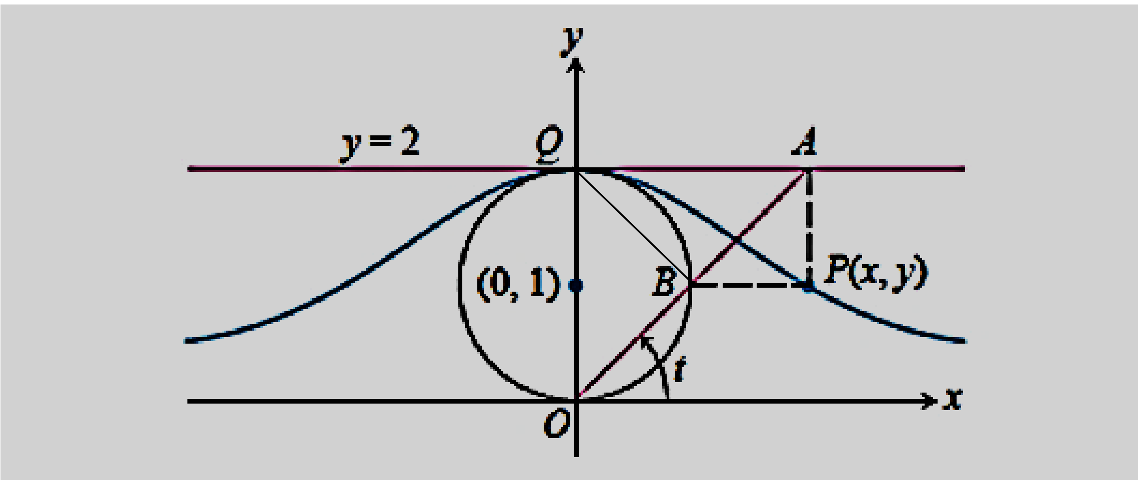
(II) Να αποδείξετε ότι : $(\mathrm{AB}) \cdot (\mathrm{AO}) = (\mathrm{A}Q)^2$.

(III) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου P είναι η καμπύλη $\psi = \dfrac{8}{\chi^2 + 4}$ (που ονομάζεται «μάγισσα της Agnesi») με τους 3 παρακάτω τρόπους :

α΄ τρόπος : Να χρησιμοποιήσετε τις σχέσεις που αποδείξατε στα ερωτήματα (I) και (II) και να εκφράσετε τις συντεταγμένες του σημείου P συναρτήσει της γωνίας t .

β΄ τρόπος : Να εκφράσετε παραμετρικά τις συντεταγμένες του σημείου P χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη γωνία t και να κάνετε απαλοιφή παραμέτρου.

γ΄ τρόπος : Να εκφράσετε παραμετρικά τις συντεταγμένες του σημείου P , χρησιμοποιώντας στοιχεία γεωμετρίας και τριγωνομετρίας , με χρήση της γωνίας t και να κάνετε απαλοιφή παραμέτρου.



Η ευθεία $\psi = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = f(\chi) = \dfrac{8}{\chi^2 + 4}$ σε δύο διακεκριμένα (διαφορετικά) σημεία .

(IV) Να βρείτε το διάστημα μεταβολής του αριθμού α.

Έστω K , Λ τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $\psi = \alpha$, όπου $\alpha \in (0,2)$ και M , N οι προβολές των K , Λ στον άξονα $\chi'\chi$ αντίστοιχα .

(V) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή του αριθμού α ώστε το τετράπλευρο $\mathrm{K\Lambda NM}$ να είναι τετράγωνο .

(VI) Αν υποθέσουμε ότι το τετράπλευρο $\mathrm{K\Lambda NM}$ δεν είναι τετράγωνο να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $\mathrm{E}(\alpha)$ δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}(\alpha) = 4\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\alpha}}$, όπου $\alpha \in (0,2)$.

(VII) Να βρείτε (χωρίς τη χρήση παραγώγων) τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $\mathrm{E}(\alpha)$. Για την τιμή του α στην οποία έχουμε το μέγιστο εμβαδόν να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{KO\Lambda}$.

(VIII) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}^*$ έτσι ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(\chi) = \dfrac{\kappa}{\chi}$, $\chi \neq 0$ να εφάπτεται στη C_f .

(IX) Για τη θετική τιμή του κ που βρήκαμε στο (VIII) ερώτημα να βρείτε τη σχετική θέση των C_f , C_g .

(X) Αν $\mathrm{T}(\chi)$ είναι η παράσταση $\mathrm{T}(\chi) = (\mathrm{OA})^4 + f^2(\chi)$, όπου A είναι το τυχαίο σημείο πάνω στην ευθεία $\psi = 2$ με $\mathrm{A}Q = \chi$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{T}(\chi) \geq 16$. Είναι ο αριθμός 16 η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\mathrm{T}(\chi)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

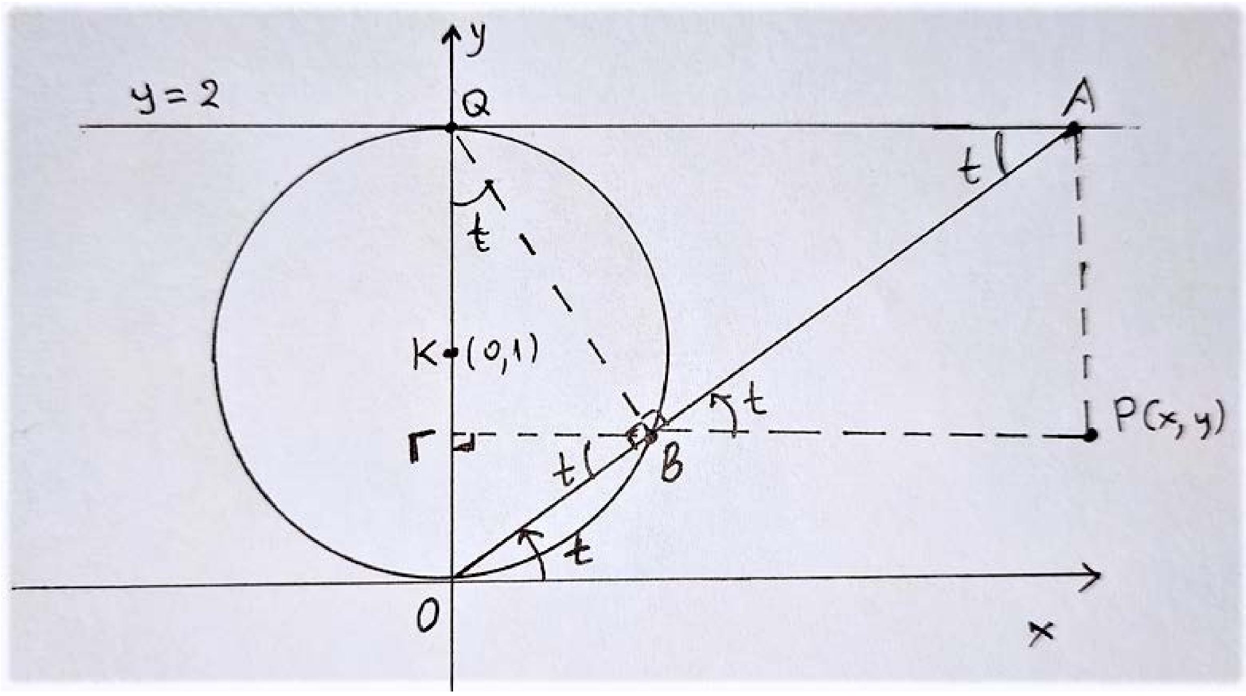
(XI) (i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται .
(ii) Θεωρούμε τον περιορισμό f_1 της f στο $[0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f_1 αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f_1^{-1}.

(iii) Να αποδείξετε ότι οι C_{f_1} , $C_{f_1^{-1}}$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο .

(XII) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ευθεία της μορφής : $\psi = \beta \cdot \chi - 1$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$, η οποία να εφάπτεται της C_f σε κάποιο σημείο της .

Παρατήρηση: Η εκφώνηση της άσκησης και τα ερωτήματα (I) , (II) και (III) **α΄ τρόπος** βρίσκονται στο βιβλίο των Thomas George B., Finney Ross, Weir Maurice και Frank Giordano «Απειροστικός Λογισμός» (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης) .

ΛΥΣΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



(Ι) Οι συντεταγμένες του σημείου A είναι $\mathrm{A}(\chi\,,2)$ και επίσης $\mathrm{A\hat{B}P}=\mathrm{A\hat{O}}\chi=\mathrm{t}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $\mathrm{BP}//\mathrm{O}\chi$ που τέμνονται από την OA . Στο τρίγωνο APB από τριγωνομετρία έχουμε :

$$\eta\mu t=\frac{(\mathrm{AP})}{(\mathrm{AB})}\Rightarrow(\mathrm{AP})=(\mathrm{AB})\cdot\eta\mu t\Rightarrow|2-\psi|=(\mathrm{AB})\cdot\eta\mu t\overset{0<\psi<2}{\Rightarrow}2-\psi=(\mathrm{AB})\cdot\eta\mu t\Rightarrow\psi=2-(\mathrm{AB})\cdot\eta\mu t$$

(ΙΙ) Ισχύει : $Q\mathrm{\hat{B}O}=90^\circ$, διότι η $\mathrm{O}Q$ είναι διάμετρος του κύκλου οπότε η $Q\mathrm{\hat{B}O}$ βαίνει σε ημικύκλιο . Επίσης : $\psi=2//\mathrm{O}\chi$ και $\mathrm{O}Q\perp Q\mathrm{A}$, άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο OQA

($\mathrm{O}\hat{Q}A=90^\circ$) από μία εκ των γνωστών μετρικών σχέσεων (Γεωμετρία Β΄ Λυκείου - Κεφάλαιο 9) που λέει ότι : ‘‘ το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου, δηλαδή της (AQ) , ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας , δηλαδή της (AO), επί την προβολή της αντίστοιχης κάθετης στην υποτείνουσα , δηλαδή η προβολή της (AQ) στην (AO) είναι η (AB) ’’ , παίρνουμε ότι : $(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{AO})=(\mathrm{A}Q)^2$.

(ΙΙΙ) α΄ τρόπος : $\mathrm{O\hat{A}}Q=\mathrm{A\hat{O}}\chi=\mathrm{t}$ ως εντός εναλλάξ των $\mathrm{A}Q//\mathrm{O}\chi$ που τέμνονται από την OA . Από τριγωνομετρία στο τρίγωνο OQA παίρνουμε : $\eta\mu t=\dfrac{(\mathrm{O}Q)}{(\mathrm{OA})}=\dfrac{2}{(\mathrm{OA})}$ και επειδή $(\mathrm{OA})^2=\chi^2+4$, από τη σχέση $(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{AO})=(\mathrm{A}Q)^2$ παίρνουμε : $(\mathrm{AB})=\dfrac{(\mathrm{A}Q)^2}{(\mathrm{AO})}=\dfrac{\chi^2}{(\mathrm{AO})}$, ενώ από τη σχέση $\psi=2-(\mathrm{AB})\cdot\eta\mu t$ παίρνουμε :

$$\psi = 2-(AB)\cdot \eta\mu t \Rightarrow \psi = 2-\frac{\chi^2}{(AO)}\cdot\frac{2}{(OA)} \Rightarrow \psi = 2-\frac{2\cdot\chi^2}{(AO)^2} \Rightarrow \psi = 2-\frac{2\cdot\chi^2}{\chi^2+4} \Rightarrow \psi = \frac{2\cdot\chi^2+8-2\cdot\chi^2}{\chi^2+4}$$

, οπότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος του σημείου P είναι η καμπύλη : $\psi = \dfrac{8}{\chi^2+4}$.

β΄ τρόπος : Η εξίσωση της ευθείας OA είναι $\psi = \lambda\cdot\chi$, όπου $\lambda \neq 0$ και η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho = 1$ είναι η $\chi^2+(\psi-1)^2 = 1$. Οι συντεταγμένες του σημείου B προκύπτουν από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{Bmatrix} \chi^2+(\psi-1)^2 = 1 \\ \psi = \lambda\cdot\chi \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \chi^2+(\lambda\cdot\chi-1)^2 = 1 \\ \psi = \lambda\cdot\chi \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \chi^2+\lambda^2\cdot\chi^2+1-2\lambda\cdot\chi = 1 \\ \psi = \lambda\cdot\chi \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} (1+\lambda^2)\cdot\chi^2 = 2\lambda\cdot\chi \\ \psi = \lambda\cdot\chi \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \chi = \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ \psi = \dfrac{2\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{Bmatrix},\ B\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)$$

Οι συντεταγμένες του σημείου A δίνονται από τη λύση του συστήματος :

$\begin{Bmatrix} \psi = \lambda\cdot\chi \\ \psi = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \chi = \dfrac{2}{\lambda} \\ \psi = 2 \end{Bmatrix}$, $A\left(\dfrac{2}{\lambda}, 2\right)$. Το σημείο P έχει συντεταγμένες $\chi_P = \chi_A = \dfrac{2}{\lambda}$,

$\psi_P = \psi_B = \dfrac{2\lambda^2}{1+\lambda^2}$. Για να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου P κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου $\lambda \neq 0$. Έχουμε $\chi_P = \dfrac{2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2}{\chi_P}$ και

$$\psi_P = \frac{2\cdot\left(\dfrac{2}{\chi_P}\right)^2}{1+\left(\dfrac{2}{\chi_P}\right)^2} \Rightarrow \psi_P = \frac{\dfrac{8}{\chi_P^2}}{1+\dfrac{4}{\chi_P^2}} \Rightarrow \psi_P = \frac{\dfrac{8}{\chi_P^2}}{\dfrac{4+\chi_P^2}{\chi_P^2}} \Rightarrow \psi_P = \frac{8}{4+\chi_P^2}$$

, άρα ο γεωμετρικός τόπος του σημείου P είναι η καμπύλη : $\psi = \dfrac{8}{\chi^2+4}$.

γ΄ τρόπος : $O\hat{B}\Gamma = B\hat{A}Q = t$, όπου $t \in (0,\pi)$, ως εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη των $B\Gamma // AQ$ που τέμνονται από την BA . Στο ορθογώνιο τρίγωνο OQA από τριγωνομετρία έχουμε : $\sigma\varphi t = \dfrac{(AQ)}{(OQ)} = \dfrac{\chi}{2} \Rightarrow \chi = 2\cdot\sigma\varphi t$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $O\Gamma B$ από τριγωνομετρία έχουμε : $\eta\mu t = \dfrac{(O\Gamma)}{(OB)} = \dfrac{\psi}{(OB)} \Rightarrow \psi = (OB)\cdot\eta\mu t$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο QBO ($Q\hat{B}O = 90^\circ$) ισχύει : $O\hat{Q}B = O\hat{B}\Gamma = t$ ως οξείες με πλευρές κάθετες , οπότε από τριγωνομετρία έχουμε :

$\eta\mu t = \dfrac{(OB)}{(OQ)} = \dfrac{(OB)}{2} \Rightarrow (OB) = 2\cdot\eta\mu t$, άρα η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή :

$\psi = 2\cdot \eta\mu^2 t$. Οι συντεταγμένες του σημείου P είναι τώρα $\mathrm{P}(\chi\,,\psi) = \left(2\sigma\varphi t\,,\ 2\cdot\eta\mu^2 t\right)$, όπου για να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο του P θα πρέπει να κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου t .

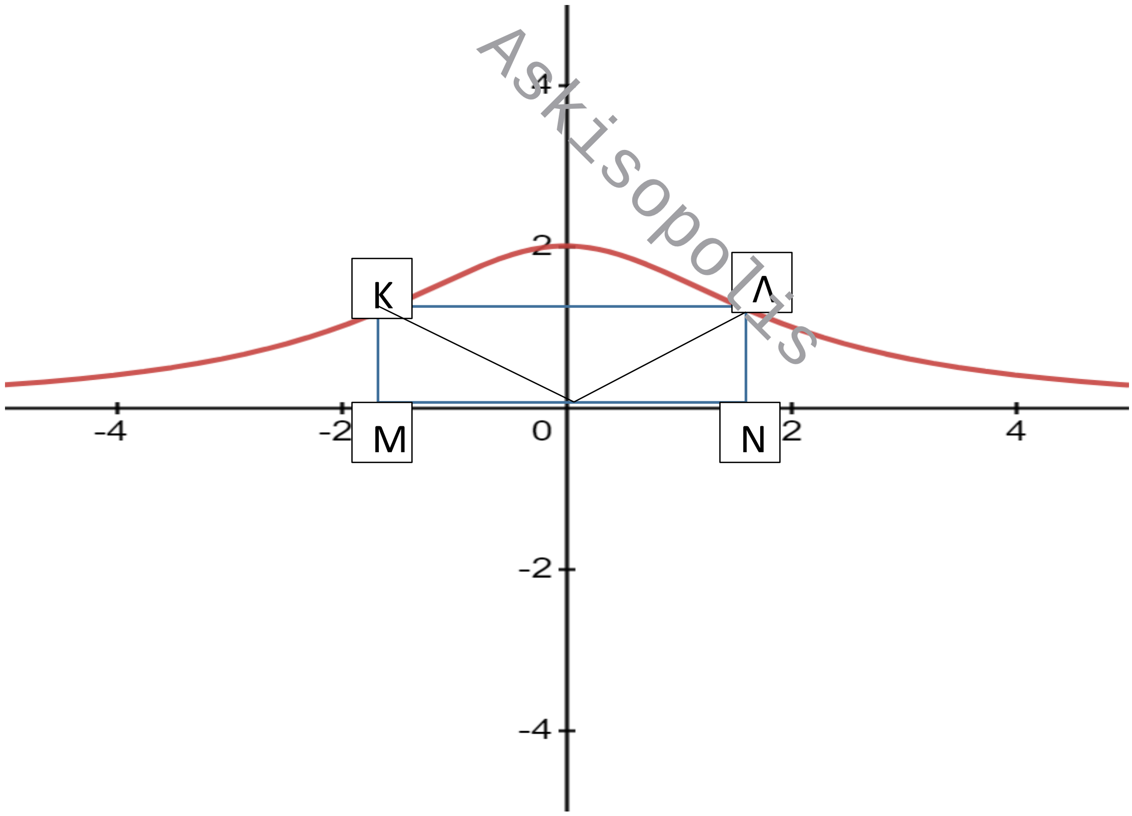
Έχουμε : $\chi = 2\cdot\sigma\varphi t \Rightarrow \sigma\varphi t = \dfrac{\chi}{2}$, $\psi = 2\cdot\eta\mu^2 t \Rightarrow \eta\mu^2 t = \dfrac{\psi}{2}$ και από τον γνωστό τύπο της τριγωνομετρίας $\sigma\varphi^2 t + 1 = \dfrac{1}{\eta\mu^2 t}$ με αντικατάσταση παίρνουμε :

$\dfrac{\chi^2}{4} + 1 = \dfrac{2}{\psi} \Rightarrow \dfrac{\chi^2+4}{4} = \dfrac{2}{\psi} \Rightarrow \psi = \dfrac{8}{\chi^2+4}$, που αποτελεί το ζητούμενο γεωμετρικό τόπο του P .

(IV) Θα πρέπει το σύστημα $\begin{cases} \psi = \dfrac{8}{\chi^2+4} \\ \psi = \alpha \end{cases}$ να έχει δύο διαφορετικές λύσεις ως προς χ . Έχουμε

$\dfrac{8}{\chi^2+4} = \alpha > 0 \Rightarrow \dfrac{8}{\alpha} - 4 = \chi^2 > 0 \Rightarrow \dfrac{8}{\alpha} > 4 \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} 0 < \alpha < 2$, δηλαδή το διάστημα μεταβολής του α είναι το $(0,2)$.

(V) Η γραφική παράσταση της καμπύλης του P είναι (όπως φάνηκε και στο σχήμα της εκφώνησης της άσκησης) η παρακάτω :



Έχουμε : $\mathrm{K}(\chi_1, \alpha)$, $\Lambda(\chi_2, \alpha)$, $\mathrm{M}(\chi_1, 0)$, $\mathrm{N}(\chi_2, 0)$, όπου χ_1 , χ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης :

$\chi^2 = \dfrac{8}{\alpha} - 4 = \dfrac{8-4\cdot\alpha}{\alpha} = \dfrac{4\cdot(2-\alpha)}{\alpha}$ και επειδή $\chi_1 < 0 < \chi_2$ παίρνουμε : $\chi_1 = -2\cdot\sqrt{\dfrac{(2-\alpha)}{\alpha}}$,

$\chi_2 = 2\cdot\sqrt{\dfrac{(2-\alpha)}{\alpha}}$. Επίσης $(\text{ΚΛ}) = (\text{ΜΝ}) = |\chi_1 - \chi_2| = 4\cdot\sqrt{\dfrac{(2-\alpha)}{\alpha}}$, $(\text{ΚΜ}) = (\text{ΛΝ}) = \alpha$. Για να είναι το τετράπλευρο ΚΛΝΜ τετράγωνο θα πρέπει να ισχύει :

$(\text{ΚΛ}) = (\text{ΚΝ}) \Rightarrow 4\cdot\sqrt{\dfrac{(2-\alpha)}{\alpha}} = \alpha \Rightarrow 16\cdot\dfrac{(2-\alpha)}{\alpha} = \alpha^2 \Rightarrow 32 - 16\cdot\alpha = \alpha^3 \Rightarrow \alpha^3 + 16\cdot\alpha - 32 = 0$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει στο διάστημα $(0,2)$ μοναδική ρίζα .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: g(\alpha) = \alpha^3 + 16\cdot\alpha - 32$, η οποία είναι συνεχής στο $(0,2)$ ως πολυωνυμική με $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} g(\alpha) = -32 < 0$, άρα υπάρχει γ "κοντά" στο 0 με $g(\gamma) < 0$ και $\lim\limits_{\alpha\to 2^-} g(\alpha) = 8 > 0$, άρα υπάρχει δ "κοντά" στο 2 με $g(\gamma) > 0$, άρα από Θ. Bolzano στο $[\gamma, \delta] \subseteq [0,2]$ η $g(\alpha)$ έχει μία τουλάχιστον λύση και επειδή η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (αποδεικνύεται με τον ορισμό κατασκευαστικά ή με παραγώγους) η εξίσωση $g(\alpha)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

(VI) Αν $\alpha_1 : g(\alpha_1) = 0$, τότε για κάθε $\alpha \in (0,2) : \alpha \neq \alpha_1$ έχουμε

$\text{Ε}(\alpha) = (\text{ΚΛ})\cdot(\text{ΚΝ}) = 4\alpha\cdot\sqrt{\dfrac{2-\alpha}{\alpha}}$, όπου $\alpha \in (0,2)$.

(VII) Έχουμε :

$$\text{Ε}(\alpha) = 4\alpha\cdot\sqrt{\frac{2-\alpha}{\alpha}} = 4\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2\cdot(2-\alpha)}{\alpha}} = 4\cdot\sqrt{2\alpha - \alpha^2} \Rightarrow$$

$$\text{Ε}^2(\alpha) = 16\cdot(2\alpha - \alpha^2) \Rightarrow 16\cdot\alpha^2 - 32\cdot\alpha + \text{Ε}^2(\alpha) = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι β΄ βαθμού ως προς α με ρίζες πραγματικές, άρα πρέπει

$\Delta \geq 0 \Rightarrow 32^2 - 4\cdot 16\cdot \text{Ε}^2(\alpha) \geq 0 \Rightarrow \text{Ε}^2(\alpha) \leq \dfrac{32^2}{4\cdot 16} \Rightarrow \text{Ε}^2(\alpha) \leq 16 \Rightarrow \text{Ε}(\alpha) \leq 4$, άρα η μέγιστη τιμή του $\text{Ε}(\alpha)$ είναι $\max \text{Ε}(\alpha) = 4$ τ.μ , που συμβαίνει στην περίπτωση όπου $\Delta = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{32}{2\cdot 16} = 1$.

Για $\alpha = 1$, έχουμε $\text{Κ}(-2, 1)$, $\Lambda(2, 1)$, άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΚΟΛ ισούται με

$(\text{ΚΟΛ}) = \dfrac{(\text{ΚΛ})\cdot(\text{ΚΜ})}{2} = \dfrac{4\cdot 1}{2} = 2$ τ.μ .

(VIII) Για να εφάπτεται η καμπύλη $g(\chi) = \dfrac{\kappa}{\chi}$ (ισοσκελής υπερβολή) της καμπύλης $f(\chi) = \dfrac{8}{\chi^2 + 4}$ θα πρέπει η εξίσωση $f(\chi) = g(\chi)$ να έχει μία ρίζα διπλή .

Έχουμε $f(\chi)=g(\chi)\Rightarrow \frac{8}{\chi^2+4}=\frac{\kappa}{\chi}\Rightarrow \kappa\cdot\chi^2-8\cdot\chi+4\cdot\kappa=0$. Στην τελευταία εξίσωση απαιτούμε $\Delta=0\Rightarrow 64-16\cdot\kappa^2=0\Rightarrow \kappa^2=4\Rightarrow \kappa=2$ ή $\kappa=-2$.

(IX) Για $\kappa=2$, έχουμε $g(\chi)=\frac{2}{\chi}$, οπότε θεωρούμε τη διαφορά

$$f(\chi)-g(\chi)=\frac{8}{\chi^2+4}-\frac{2}{\chi}=\frac{8\cdot\chi-2\cdot\left(\chi^2+4\right)}{\chi\cdot\left(\chi^2+4\right)}=\frac{-2\cdot(\chi-2)^2}{\chi\cdot\left(\chi^2+4\right)} \ .$$

- Για $\chi=2$, έχουμε : $f(\chi)-g(\chi)=0$, άρα οι C_f , C_g τέμνονται στο σημείο $(2\ ,1)$.
- Για $0<\chi\neq 2$, έχουμε : $f(\chi)-g(\chi)=\frac{-2\cdot(\chi-2)^2}{\chi\cdot\left(\chi^2+4\right)}<0$, άρα η C_f βρίσκεται «κάτω» από τη C_g .
- Για $\chi<0$, έχουμε : $f(\chi)-g(\chi)=\frac{-2\cdot(\chi-2)^2}{\chi\cdot\left(\chi^2+4\right)}>0$, άρα η C_f βρίσκεται «πάνω» από τη C_g .

(X) Έχουμε $T(\chi)=(OA)^4+f^2(\chi)=\left(\sqrt{\chi^2+4}\right)^4+\frac{64}{\left(\chi^2+4\right)^2}=\left(\chi^2+4\right)^2+\frac{64}{\left(\chi^2+4\right)^2}$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε α , $\beta>0$ ισχύει : $\alpha+\beta\ \geq 2\ \sqrt{\alpha\cdot\beta}$ με την ισότητα να ισχύει για $\alpha=\beta$. Άρα για $\alpha=\left(\chi^2+4\right)^2>0$, $\beta=\frac{64}{\left(\chi^2+4\right)^2}>0$, έχουμε

$T(\chi)=\left(\chi^2+4\right)^2+\frac{64}{\left(\chi^2+4\right)^2}\geq 2\sqrt{\left(\chi^2+4\right)^2\cdot\frac{64}{\left(\chi^2+4\right)^2}}\Rightarrow T(\chi)\geq 16$. Για να είναι ο αριθμός 16 η ελάχιστη τιμή της παράστασης $T(\chi)$ θα πρέπει να υπάρχει $\chi\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$\alpha=\beta\Rightarrow\left(\chi^2+4\right)^2=\frac{64}{\left(\chi^2+4\right)^2}\Rightarrow\left(\chi^2+4\right)^4=64\Rightarrow\left(\chi^2+4\right)^2=8\Rightarrow\chi^2+4=2\sqrt{2}\Rightarrow\chi^2=2\cdot\left(\sqrt{2}-2\right)<0$$

που είναι αδύνατη , άρα ο αριθμός 16 δεν η ελάχιστη τιμή της παράστασης $T(\chi)$.

(XI) (i) Επειδή : $f(2)=f(-2)=1$ η συνάρτηση f δεν είναι 1-1 , οπότε δεν αντιστρέφεται .

(ii) Στο $[0,+\infty)$ για κάθε χ_1 , $\chi_2\in[0,+\infty)$ με

$f_1(\chi_1)=f_1(\chi_2)\Rightarrow\frac{8}{\chi_1^2+4}=\frac{8}{\chi_2^2+4}\Rightarrow\chi_1^2=\chi_2^2\Rightarrow\chi_1=\chi_2$, άρα η συνάρτηση f_1 είναι 1-1 , οπότε αντιστρέφεται .

Θέτουμε $f_1(\chi)=\psi=\dfrac{8}{\chi^2+4}>0\Rightarrow \psi\cdot\chi^2+4\cdot\psi=8\Rightarrow \chi^2=\dfrac{8-4\cdot\psi}{\psi}\geq 0\Rightarrow 0<\psi\leq 2$, άρα

$\chi=\sqrt{\dfrac{8-4\cdot\psi}{\psi}}$ οπότε ορίζεται η συνάρτηση $f_1^{-1}:(0,2]\to[0,+\infty)$ με τύπο : $f_1^{-1}(\chi)=\sqrt{\dfrac{8-4\cdot\chi}{\chi}}$

(iii) Για να αποδείξουμε ότι οι C_{f_1} , $C_{f_1^{-1}}$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο , αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση : $\dfrac{8}{\chi^2+4}=\sqrt{\dfrac{8-4\cdot\chi}{\chi}}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\Delta=(0,2]\cap[0,+\infty)=(0,2]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h:h(\chi)=\dfrac{8}{\chi^2+4}-\sqrt{\dfrac{8-4\cdot\chi}{\chi}}$, όπου $h(2)=1>0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}h(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\dfrac{8}{\chi^2+4}-\sqrt{\dfrac{8-4\cdot\chi}{\chi}}\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\dfrac{8}{\chi^2+4}\right)=2$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\dfrac{8}{\chi}-4\right)=+\infty$, άρα υπάρχει χ_1 «κοντά» στο 0 με $h(\chi_1)<0$. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[\chi_1,2]\subseteq(0,2]$ ως πηλίκο, διαφορά και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων με $h(\chi_1)\cdot h(2)<0$, άρα από Θ. Bolzano , η εξίσωση $h(\chi)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,2]$.

(XII) Έστω ότι υπάρχει $\beta\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε η ευθεία της μορφής : $\psi=\beta\cdot\chi-1$ να εφάπτεται της C_f σε κάποιο σημείο της . Άρα θα πρέπει το σύστημα $\begin{cases}\psi=\beta\cdot\chi-1\\ \psi=\dfrac{8}{\chi^2+4}\end{cases}$ να έχει ως προς $\chi\in\mathbb{R}$ μία διπλή ρίζα για όλες τις τιμές του $\beta\in\mathbb{R}$. Έχουμε :

$\dfrac{8}{\chi^2+4}=\beta\cdot\chi-1\Rightarrow(\beta\cdot\chi-1)\cdot(\chi^2+4)-8=0\Rightarrow\beta\cdot\chi^3-\chi^2+4\beta\cdot\chi-12=0$. Έστω ότι η τελευταία εξίσωση έχει διπλή ρίζα $\rho\in\mathbb{R}$. Τότε θα ισχύει $\beta\cdot\rho^3-\rho^2+4\beta\cdot\rho=12$ (1).

Εφαρμόζοντας διαδοχικά δύο σχήματα Horner παίρνουμε :

β	-1	4β	-12	ρ
	$\beta\cdot\rho$	$\beta\cdot\rho^2-\rho$	$\beta\cdot\rho^3-\rho^2+4\beta\cdot\rho$	
β	$\beta\cdot\rho-1$	$\beta\cdot\rho^2-\rho+4\cdot\beta$	0	

β	$\beta\cdot\rho-1$	$\beta\cdot\rho^2-\rho+4\cdot\beta$	ρ
	$\beta\cdot\rho$	$2\beta\cdot\rho^2-\rho$	
β	$2\beta\cdot\rho-1$	$3\beta\cdot\rho^2-2\cdot\rho+4\cdot\beta=0$	(2)

Αναζητούμε αν έχει λύσεις το σύστημα των (1), (2) , δηλαδή το σύστημα :

$$\left\{\begin{matrix} \beta\cdot\rho^3-\rho^2+4\beta\cdot\rho=12 \\ 3\beta\cdot\rho^2-2\cdot\rho+4\cdot\beta=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \beta\cdot\rho^3-\rho^2+4\beta\cdot\rho=12 \\ \beta=\dfrac{2\cdot\rho}{3\rho^2+4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\cdot\rho}{3\rho^2+4}\right)\cdot\rho^3-\rho^2+\left(\frac{8\cdot\rho}{3\rho^2+4}\right)\cdot\rho=12 \Rightarrow 2\cdot\rho^4-\rho^2\cdot\left(3\rho^2+4\right)+8\cdot\rho^2=12\cdot\left(3\cdot\rho^2+4\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\rho^4-3\cdot\rho^4-4\cdot\rho^2+8\cdot\rho^2-36\cdot\rho^2-48=0 \Rightarrow -\rho^4-32\cdot\rho^2-48=0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι προφανώς αδύνατη διότι για κάθε $\rho\in\mathbb{R}$ ισχύει : $-\rho^4-32\cdot\rho^2-48<0$, άρα δεν υπάρχει ευθεία της μορφής : $\psi=\beta\cdot\chi-1$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$, η οποία να εφάπτεται της C_f σε κάποιο σημείο της .